TROISIEME COMPOSITION DE MATHEMATIQUES
(Durée : 2 heures)

. Le correcteur demande aux candidats de rédiger avec le plus grand soin leurs démonstrations et d'encadrer les résultats obtenus.

. Un raisonnement vague ou incomplet ne pourra en aucun cas être considéré comme une démonstration acceptable.

. Les candidats pourront utiliser (dans la suite du problème) les résultats des questions qu'ils n'auront pas pu traiter correctement à la condition expresse de le mentionner explicitement.

*

. $\mathbb{R}^n$ est muni du produit scalaire usuel $(X,Y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ où $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ sont deux vecteurs colonnes. On notera $\| \ \|$ la norme euclidienne associée : $\|X\|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$.

. I_n désigne la matrice identité carrée d'ordre n. Si A est une matrice, on note ${}^tA$ la matrice transposée associée. Enfin si $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$ est un vecteur colonne, on identitiera la matrice ${}^tuu$ au nombre réel $\sum_{i=1}^{n} u_i^2$.

I

1°] Soit $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$ un vecteur colonne de norme 1 (c'est-à-dire tel que : ${}^tuu = \sum_{j=1}^{n} u_j^2 = 1$).

Soit P la matrice carrée d'ordre n définie par $P = I_n - 2u{}^tu$.

a] Déterminer ${}^tP$.

b] Déterminer P^{-1} .

c] Donner une interprétation géométrique de l'endomorphisme admettant P pour matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

2°] Soit $n \geqslant 3$ et soit $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ un vecteur colonne tel que $\sum_{i=3}^{n} |a_i| > 0$.

a] Prouver alors qu'il existe un vecteur colonne $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$ vérifiant les trois propriétés suivantes :

i) $u_1 = 0$

ii) ${}^t uu = 1$

iii) le vecteur colonne $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ défini par $b = (I - 2u^t u)a$ est tel que $b_1 = a_1$ et $0 = b_3 = b_4 = \ldots = b_n$.

b] Exprimer (dans la situation du 2°]a]) u en fonction de a et b.

3°] Soit $n \geqslant 3$ et soit $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ une matrice réelle carrée d'ordre n symétrique telle que $\sum_{i=3}^{n} |a_{i,1}| > 0$. Posons $a = \begin{pmatrix} a_{1,1} \\ \vdots \\ a_{n,1} \end{pmatrix}$. Soit u un vecteur colonne vérifiant les trois propriétés i), ii), iii) du 2°]a] relativement au vecteur colonne $a = \begin{pmatrix} a_{1,1} \\ \vdots \\ a_{n,1} \end{pmatrix}$.

Posons $P = I_n - 2u^t u$ et $P^{-1}AP = (b_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$.

Calculer $b_{i,1}$ et $b_{1,i}$ pour $3 \leqslant i \leqslant n$.

4°] Soit $n \geqslant 3$ et soit $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ une matrice réelle carrée d'ordre n <u>symétrique</u>. Prouver qu'il existe une matrice orthogonale Q d'ordre n telle que $Q^{-1}AQ$ soit de la forme :

$$Q^{-1}AQ = \begin{bmatrix} c_1 & b_1 & 0 & \dots & 0 \\ b_1 & c_2 & b_2 & \ddots & \vdots \\ 0 & b_2 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & c_{n-1} & b_{n-1} \\ 0 & \dots & 0 & b_{n-1} & c_n \end{bmatrix} ,$$

c'est-à-dire $Q^{-1}AQ = (\alpha_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$

avec $\alpha_{ii} = c_i \qquad \forall\, i = 1,2,\dots,n$,
$\alpha_{i,i+1} = \alpha_{i+1,i} = b_i \qquad \forall\, i = 1,2,\dots,n-1$

et $\alpha_{i,j} = 0$ pour $i = 1,2,\dots,n$ et $j < i-1$ ou $j > i+1$

(une telle matrice est dite tridiagonale).

II

On considère la matrice réelle carrée d'ordre n, de la forme précédente :

$$A = \begin{bmatrix} c_1 & b_1 & 0 & \dots & 0 \\ b_1 & c_2 & b_2 & \ddots & \vdots \\ 0 & b_2 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & c_{n-1} & b_{n-1} \\ 0 & \dots & 0 & b_{n-1} & c_n \end{bmatrix}$$

où les b_i et les c_i sont des nombres réels. On suppose que $\forall\, i \in \{1,2,\dots,n-1\}$ $b_i \neq 0$.

On définit la suite de polynômes $P_i(X)$, $0 \leqslant i \leqslant n$ par les relations de récurrence suivantes :

$$P_0(X) = 1$$
$$P_1(X) = c_1 - X$$
$$P_i(X) = (c_i - X)\, P_{i-1}(X) - b_{i-1}^2\, P_{i-2}(X) \quad , \text{ pour } 2 \leqslant i \leqslant n$$

1°] Exprimer le polynôme caractéristique de A, $\det(A - XI_n)$, en fonction de $P_0(X), P_1(X), \ldots, P_n(X)$.

2°] Soit $i \in \{1,2,\ldots,n-1\}$ et $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ tel que $P_i(\lambda_0) = 0$.
Déterminer alors le signe de $P_{i-1}(\lambda_0)\ P_{i+1}(\lambda_0)$.

3°] Soit $i \in \{1,2,\ldots,n\}$.

Déterminer le nombre de racines réelles de $P_i(X)$; si de plus $i \leqslant n-1$ prouver que les zéros réels de $P_i(X)$ séparent ceux de $P_{i+1}(X)$.

Pour $\lambda \in \mathbb{R}$ et $i \in \{1,2,\ldots,n\}$ on pose :

$$\operatorname{sgn} P_i(\lambda) = \begin{cases} \text{signe de } P_i(\lambda) & \text{si } P_i(\lambda) \neq 0 \\ \text{signe de } P_{i-1}(\lambda) & \text{si } P_i(\lambda) = 0 \end{cases}$$

On considère l'ensemble

$$E_i(\lambda) = \{+, \operatorname{sgn} P_1(\lambda), \operatorname{sgn} P_2(\lambda), \ldots, \operatorname{sgn} P_i(\lambda)\}$$

et on note $\sigma_i(\lambda)$ le nombre de paires consécutives de même signe dans la définition précédente de $E_i(\lambda)$.

(Par exemple si $E_{10}(\lambda) = \{\overbrace{+}^{1},\overbrace{+,-}^{2},\overbrace{+,-,-}^{3},\overbrace{+,-,-,-}^{4},+\}$ alors $\sigma_{10}(\lambda) = 4$) .

4°] Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $i \in \{1,2,\ldots,n\}$. Déterminer $\sigma_i(\lambda)$ en fonction du nombre de racines de $P_i(X)$ qui sont supérieures (ou égales) à λ. (On raisonnera par récurrence ascendante sur i, en distinguant quatre cas suivant la place de λ et en utilisant des dessins pour illustrer la situation).

5°] Considérons les valeurs propres de A rangées dans l'ordre suivant :

$$\lambda_n < \lambda_{n-1} < \lambda_{n-2} < \ldots < \lambda_2 < \lambda_1$$

Fixons $i \in \{1,2,\ldots,n\}$ et considérons un intervalle $[a_0, b_0]$ contenant λ_i .

a] Si $\sigma_n\left(\frac{a_o + b_o}{2}\right) \geqslant i$ préciser auquel des deux intervalles $\left[a_o, \frac{a_o + b_o}{2}\right]$, $\left[\frac{a_o + b_o}{2}, b_o\right]$ appartient λ_i .

b] Même question si $\sigma_n\left(\frac{a_o + b_o}{2}\right) < i$.

c] En déduire un algorithme très simple permettant d'encadrer λ_i d'aussi près que l'on veut.

Soit $\bar{\lambda}$ un réel tel que :

$$0 < |\bar{\lambda} - \lambda_i| < \inf_{\substack{1 \leqslant j \leqslant n \\ j \neq i}} |\lambda_j - \bar{\lambda}| \quad .$$

Soit x_o un vecteur de $\mathbb{R}^n$ non orthogonal au sous-espace propre de A correspondant à λ_i . On définit par récurrence la suite $(x_k)_{k \geqslant 0}$ de vecteurs de $\mathbb{R}^n$:

$$(A - \bar{\lambda}\, Id)\, x_{k+1} = x_k \quad .$$

6°] a] Prouver que $\forall\, k \in \mathbb{N} \quad \|x_k\| \neq 0$.

b] Si $\bar{\lambda} < \lambda_i$ prouver que la suite $\left(\frac{x_k}{\|x_k\|}\right)_{k \geqslant 0}$ converge vers un point x de $\mathbb{R}^n$. Comment peut-on interpréter géométriquement x en fonction de x_o ?

c] Même question si $\bar{\lambda} > \lambda_i$ pour la suite $\left(\frac{(-1)^k\, x_k}{\|x_k\|}\right)_{k \geqslant 0}$.